

Elementi di meccanica Lagrangiana e Hamiltoniana

October 17, 2024

1 Meccanica Lagrangiana

Le equazioni di Lagrange costituiscono una conveniente riscrittura delle equazioni di Newton per sistemi conservativi, cioè sistemi dove le forze agenti ammettono potenziale. Esse possono essere derivate a partire da un fondamentale e affascinante principio, il principio di minima azione¹. Secondo tale principio ogni sistema fisico è caratterizzato da una certa funzione, la **Lagrangiana**

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (1.1)$$

che per un sistema di particelle soggette ad un certo potenziale, in approssimazione non-relativistica può essere espressa come

$$\mathcal{L} = T - V \quad (1.2)$$

dove T è l'energia cinetica e V è l'energia potenziale. I moti naturali sono quelli per cui i movimenti $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ soddisfano una ben determinata condizione: fissati due punti $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$, $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$ agli istanti t_1 e t_0 , i moti sono tali che l'integrale

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (1.3)$$

assume il valor minimo. La quantità che assume il valor minimo S è detta **azione**.

La branca della matematica che si occupa di trovare il minimo di una grandezza come S (i cosiddetti *funzionali*) si chiama **calcolo delle variazioni**. Solitamente infatti ci troviamo ad avere una funzione di qualche variabile e dobbiamo trovare il valore di tale variabile per avere un minimo. In questo caso invece abbiamo un'intera famiglia di curve e dobbiamo trovare la curva per la quale il valore assunto tra i due estremi è minimo. Si capisce che è un problema completamente diverso. Ci sono diversi problemi matematici che appartengono al calcolo delle variazioni: per esempio, il cerchio può essere definito come la curva dal perimetro assegnato che racchiude l'area più grande; la retta è definita come la curva di minor lunghezza che congiunge due punti diversi, etc.

Come possiamo calcolare quale è il giusto cammino per il quale l'integrale assume il valore minimo? Dall'ordinario calcolo dei massimi e minimi ci ricordiamo di come in un punto estremante una variazione al prim'ordine in prima approssimazione non faccia differenza. Infatti se c'è una variazione

¹Le equazioni di Newton però comprendono anche forze non conservative, come ad esempio l'attrito. Tuttavia a livello microscopico tutte le forze sono conservative. Quindi le leggi fondamentali possono essere dedotte con un principio di minima azione. L'attrito e le altre complicazioni derivano dal fatto che stiamo trascurando gli effetti microscopici di un numero non indifferente di particelle.

al prim'ordine essa è proporzionale alla variazione del valore dell'integrale. Se siamo in un punto di minimo la variazione non fa altro che aumentare il valore dell'azione; ma se la differenza è proporzionale alla variazione, se cambiamo segno alla variazione facciamo diminuire il valore dell'integrale. Quindi l'unica possibilità per trovarsi in un punto di minimo è che la variazione al prim'ordine sia nulla. Per trovare un minimo facciamo quello che si fa per il calcolo ordinario: vediamo cosa succede se al cammino minimo $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ sostituiamo $\mathbf{q}(t) + \delta \mathbf{q}$ e quindi, per linearità della derivata, a $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(t)$ sostituiamo $\dot{\mathbf{q}}(t) + \delta \dot{\mathbf{q}}$. Scriviamo quindi:

$$S' = \int_{t_0}^{t_1} dt \mathcal{L}(\mathbf{q} + \delta \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \delta \dot{\mathbf{q}}, t)$$

che possiamo riscrivere come:

$$S' = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \dot{\mathbf{q}} \right) + (\text{termini di ordine superiore}) \right]$$

ma il termine di primo ordine, che spesso è chiamato semplicemente *variazione*, deve essere nullo:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \dot{\mathbf{q}} \right) = 0 \quad (1.4)$$

A questo punto integriamo per parti. Infatti vogliamo che tale integrale sia nullo per qualunque $\delta \mathbf{q}$, di conseguenza vogliamo liberarci dalla dipendenza da $\delta \dot{\mathbf{q}}$. La formula per l'integrazione per parti è:

$$\int_a^b dt f(t) \frac{d}{dt} g(t) = f(t)g(t) \Big|_a^b - \int_a^b dt g(t) \frac{d}{dt} f(t)$$

Nel nostro caso applichiamo tale formula con $f = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ e $g = \delta \mathbf{q}$, ottenendo:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \delta \mathbf{q} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q} \right) \right] = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \delta \mathbf{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q} \Big|_{t_0}^{t_1}$$

Ma la variazione a t_0 e t_1 è nulla in quanto sono fissati q_0 e q_1 . Di conseguenza rimaniamo con la condizione:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \delta \mathbf{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q} \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (1.5)$$

Tale condizione deve valere *per ogni* $\delta \mathbf{q}$. Ma di conseguenza, affinché sia nullo l'integrale, la funzione per cui è moltiplicato $\delta \mathbf{q}$ deve essere nullo (infatti se per assurdo ci fosse un punto dove la funzione è diversa da 0 potremmo arbitrariamente costruire $\delta \mathbf{q}$ in modo tale da rendere positivo l'integrale). Abbiamo quindi ottenuto le **equazioni di Lagrange**:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0 \quad (1.6)$$

Se il sistema ha più gradi di libertà, allora scegliendo opportunamente $\delta \mathbf{q} = (0, \dots, \delta q, \dots, 0)$, otteniamo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (1.7)$$

Le grandezze $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ sono dette **momenti coniugati** alle velocità q_i e si indicano con p_i . In questo modo le equazioni possono essere scritte:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

Nota la Lagrangiana del sistema, le equazioni (1.7) costituiscono le **equazioni di moto** del sistema. Esse sono equivalenti alle equazioni di Newton.

Esempio: Consideriamo il caso di una particella di massa m sotto l'azione di un potenziale, ad esempio il potenziale gravitazionale. La Lagrangiana del sistema risulta essere:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - m g z$$

In questo caso le equazioni di Lagrange sono:

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= 0 \\ m \ddot{y} &= 0 \\ m \ddot{z} &= -m g \end{aligned}$$

che sono proprio le equazioni di Newton.

In verità, non abbiamo provato di trovarci in una condizione di minimo, ma solo in un punto estremante dell'integrale. In alcune circostanze ci possiamo trovare, ad esempio, in un punto di massimo; quindi il modo corretto di enunciare il principio di minima azione è che i moti naturali del sistema sono quelli per cui la variazione è nulla:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \dot{\mathbf{q}} \right) = 0$$

2 Meccanica Hamiltoniana

La descrizione di un sistema fisico mediante le equazioni di Lagrange, introducendo le posizioni e le velocità generalizzate, non è l'unica possibile. Per poter apprezzare maggiormente alcune proprietà dei sistemi meccanici, per risolvere alcuni problemi specifici, per intuire una maggiore simmetria alla base della meccanica stessa, si rende necessario il passaggio alla descrizione del sistema attraverso le posizioni e i momenti coniugati. Il cambiamento di variabili che ci accingiamo ad effettuare è noto con il nome di *trasformata di Legendre*. Condizione necessaria per poter effettuare questo passaggio da un insieme di variabili indipendente ad un altro è la condizione di nondegenerazione della Lagrangiana, vale a dire:

$$\det \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \neq 0 \quad (2.1)$$

Scriviamo il differenziale della Lagrangiana:

$$d\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

che possiamo riscrivere, dato che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i$$

come

$$d\mathcal{L} = \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

Sciviamo ora il secondo termine come:

$$p_i d\dot{q}_i = d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i$$

E otteniamo, sostituendo e riordinando i termini:

$$d(p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}) = -\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

Chiamiamo **Hamiltoniana** del sistema la grandezza:

$$H = p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \tag{2.2}$$

In questo modo si ha:

$$dH = -\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

e otteniamo le equazioni di Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \tag{2.3}$$

In più si ha

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tag{2.4}$$

L'Hamiltoniana è una grandezza fisica che per la maggior parte dei sistemi naturali rappresenta l'energia complessiva del sistema $T + V$. Infatti, sfruttando il teorema di Eulero per le funzioni omogenee possiamo scrivere:

$$p_i \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T \tag{2.5}$$

Nel caso in cui l'energia cinetica sia una forma quadratica (e omogenea) nelle velocità. In tal caso perciò

$$H = p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = 2T - T + V = T + V \tag{2.6}$$

L'Hamiltoniana perciò è l'energia del sistema espressa come funzione delle coordinate generalizzate e dei momenti coniugati.

Esempio Consideriamo una particella in tre dimensioni soggetta al potenziale $V(\mathbf{x})$. L'Hamiltoniana del sistema in coordinate cartesiane è

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + V(x, y, z)$$

2.1 Parentesi di Poisson

Consideriamo una funzione qualunque delle posizioni, momenti coniugati e del tempo (detta *variabile dinamica*)

$$f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

e calcoliamone la dipendenza temporale. La sua derivata totale rispetto al tempo è:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right\}$$

che possiamo riscrivere, sfruttando le equazioni di Hamilton, come:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\} \quad (2.7)$$

L'espressione che compare a secondo termine dell'equazione viene detta **parentesi di Poisson** delle grandezze f e H e viene indicata con $\{f, H\}$. In generale date due variabili dinamiche f , g si dice parentesi di Poisson la grandezza:

$$\{f, g\} = \sum_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right\} \quad (2.8)$$

Per una funzione non dipendente esplicitamente dal tempo la dipendenza temporale diventa:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} \quad (2.9)$$

di conseguenza le funzioni che rimangono costanti lungo le soluzioni delle equazioni, gli *integrali del moto*, sono tali che (se non c'è dipendenza esplicita dal tempo):

$$\{f, H\} = 0 \quad (2.10)$$

Introducendo la notazione di parentesi di Poisson le equazioni di Hamilton possono essere scritte nella forma più simmetrica:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \{p_i, H\} \\ \dot{p}_i = \{q_i, H\} \end{cases} \quad (2.11)$$

Proprietà delle parentesi di Poisson

Le parentesi di Poisson hanno le seguenti proprietà:

- $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (antisimmetria)
- $\{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g\} = \alpha_1 \{f_1, g\} + \alpha_2 \{f_2, g\}$ (linearità)
- $\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2$ (regola di Leibniz)
- $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (identità di Jacobi)

Ponendo al posto di f e g le posizioni q_i e i momenti coniugati p_i otteniamo quelle che sono chiamate *parentesi di Poisson fondamentali*:

$$\{q_i, q_k\} = 0, \quad \{p_i, p_k\} = 0, \quad \{q_i, p_k\} = \delta_{ik}$$

L'insieme delle variabili dinamiche nello spazio delle fasi \mathcal{F} , munito della legge di prodotto definita dalle parentesi di Poisson costituisce una *algebra di Lie*. Uno spazio vettoriale \mathcal{V} è una algebra di Lie se è definita una operazione di prodotto (prodotto di Lie) $*$ tra gli elementi dello spazio che soddisfi le proprietà:

1. $(\lambda a_1 + a_2) * a_3 = \lambda(a_1 * a_3) + (a_2 * a_3) \quad a_1 * (\lambda a_2 + a_3) = \lambda(a_1 * a_2) + (a_1 * a_3)$ (bilinearità)
2. $a * a = 0 \quad \forall a \in \mathcal{V}$
3. $(a_1 * a_2) * a_3 + (a_2 * a_3) * a_1 + (a_3 * a_1) * a_2 = 0$ (identità di Jacobi)

Dalle due prime proprietà si deduce l'antisimmetria del prodotto di Lie:

$$0 = (a_1 + a_2) * (a_1 + a_2) = a_1 * a_1 + a_1 * a_2 + a_2 * a_1 + a_2 * a_2 = a_1 * a_2 + a_2 * a_1$$

da cui

$$a_1 * a_2 = -a_2 * a_1$$

La struttura di algebra di Lie appare anche nell'ambito delle matrici reali antisimmetriche oppure nell'ambito delle matrici hermitiane. Le matrici formano uno spazio vettoriale chiuso rispetto all'operazione binaria del commutatore di matrici²

$$[A, B] = AB - BA \quad (2.12)$$

vale a dire il commutatore di A, B , è un'algebra di Lie. In questo caso la dimostrazione dell'identità di Jacobi è molto più semplice che nel caso classico:

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] &= [A, BC - CB] + [B, CA - AC] + [C, AB - BA] = \\ &= [A, BC] - [A, CB] + [B, CA] - [B, AC] + [C, AB] - [C, BA] = \\ &= ABC - BAC + BAC - BCA - ACB + CAB - CAB + CBA + \\ &+ BCA - CBA + CBA - CAB - BAC + ABC - ABC + ACB + \\ &+ CAB - ACB + ACB - ABC - CBA + BCA - BCA + BAC = \\ &= 0 \end{aligned}$$

²Nel secondo caso il commutatore va moltiplicato per l'unità immaginaria.