Esercizi per il corso di Meccanica Quantistica C.d.L. magistrale in Matematica, A.A. 2024-2025

Luca Rottoli

January 10, 2025

Esercizio 1. Potenziale a delta attrattivo in una dimensione

Considerare un potenziale a delta attrattivo in una dimensione dato da

$$V(x) = -\frac{\hbar^2\alpha}{2m}\delta(x), \qquad \alpha > 0. \tag{1}$$

(a) Scrivere l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo per una particella di massa m che si muove in questo potenziale.

(b) Mostrare che la derivata delle autofunzioni di questo sistema è discontinua a $x = 0$*. Trovare il valore della discontinuità* $\lim_{\epsilon\to 0}[\partial_x\psi(\varepsilon) - \partial_x\psi(-\varepsilon)]$.

(c) Trovare le soluzioni generali all'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo per le regioni $x > 0$ *e* $x < 0$ *separatamente nel caso* $E < 0$*. Suggerimento: includere solamente soluzioni normalizzabili.*

(d) Combinare le due soluzioni del punto (c) richiedendo che la funzione d'onda sia continua a $x = 0$ *e usando la soluzione del punto (b). Mostrare che esiste solo uno stato legato, trovare la sua energia e scrivere la autofunzione d'onda normalizzata per tale autostato.*

Esercizio 2. Potenziale a delta repulsivo in una dimensione

Considerare lo stesso potenziale dell'Esercizio 1

$$V(x) = -\frac{\hbar^2\alpha}{2m}\delta(x) \tag{2}$$

ma prendere ora $\alpha < 0$.

(a) *Trovare le soluzioni generali dell'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo per una particella di massa m soggetta a tale potenziale nelle regioni $x < 0$ e $x > 0$ per il caso $E > 0$. Discuterne la normalizzazione: sono normalizzabili in senso proprio o improprio?*

(b) *Analizzare il caso di una particella proveniente da sinistra e che urta il potenziale a delta. Determinare la soluzione dell'hamiltoniana che nella regione $x > 0$ coincide con una onda puramente progressiva (ovvero, considerare solo la soluzione che ha momento k positivo per $x > 0$). Per ottenere questa soluzione usare il risultato del punto (a) per determinare le autofunzioni dell'hamiltoniana nelle regioni $x > 0$ e $x < 0$ e usare il fatto che la derivata è discontinua in $x = 0$, usando il risultato del punto (b) dell'Esercizio 1. N.B.: non serve normalizzare le autofunzioni trovate.*

(c) *Determinare la corrente di probabilità sia nella regione $x < 0$ che nella regione $x > 0$. È continua in $x = 0$?*

(d) *Determinare i coefficienti di riflessione e trasmissione R e T usando le definizioni discusse a lezione.*

Esercizio 3. Oscillatore armonico

Considerare una particella soggetta a un potenziale armonico. L'hamiltoniana del sistema è

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2. \tag{3}$$

La funzione d'onda $\psi(x, t)$ della particella a tempo $t = 0$ è data da

$$\tilde{\psi}(x) \equiv \psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{x}{|x|}\right) \phi(x) \tag{4}$$

dove $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione dispari, ovvero $\phi(-x) = \phi(x)$, normalizzata a 1, i.e. $\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\phi(x)|^2 = 1$.

(a) *Discutere la parità della funzione d'onda $\tilde{\psi}(x)$ e mostrare che è correttamente normalizzata.*

(b) *Trovare la densità di probabilità $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$ a $x = 0$ della funzione d'onda al tempo $t = 0$, ovvero calcolare $\rho(0, 0)$.*

(c) *Calcolare la probabilità di trovare la particella nella regione $x > 0$ a tempo $t = 0$. Qual è la probabilità di trovarla nella regione $x < 0$?*

(d) *Mostrare che esiste un tempo $t_+ = \frac{\pi}{\omega}$ tale che la particella è completamente localizzata nella regione $x > 0$. Suggerimento: Espandere la funzione d'onda iniziale $\tilde{\psi}(x) = \sum_n a_n \psi_n(x)$ su una base di autostati di $\psi_n(x, t)$ dell'hamiltoniana di oscillatore armonico, la cui evoluzione è data da $\psi_n(x, t) = \exp(-iE_n t/\hbar)\psi_n(t)$, $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ e usare il fatto che le autofunzioni hanno parità definita, $\psi_n(-x) = (-1)^n \psi(x)$.*

(d) *Esiste un tempo* $t_- > 0$ *per cui invece la particella è completamente localizzata nella regione* $x < 0$?

(f) *Mostrare che a tempo* $T = \frac{\pi}{2\omega}$ *la probabilità di trovare la particella nella regione* $x > 0$ *è uguale alla probabilità di trovare la particella nella regione* $x < 0$.

(g) *Calcolare la corrente di probabilità associata a* $\psi(x,\tau)$ *per* $\tau \in \{0, t_+, t_-\}$. *Suggerimento: notare che nella decomposizione* $\tilde{\psi}(x) = \sum_n a_n \psi_n(x)$ *sia* $\tilde{\psi}(x)$ *che* ψ_n *sono reali e quindi sono reali anche i coefficienti* a_n.

Esercizio 4. Spin e momento angolare orbitale

Le matrici di spin per una particella di spin 1/2 soddisfano la relazione

$$[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k. \tag{5}$$

Considerare due operatori vettoriali V_i, W_j *(ovvero t.c.* $[L_i, V_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}V_k$, $[L_i, W_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}W_k$ *dove* L *è il momento angolare orbitale) che obbediscono le relazioni di commutazione dell'algebra di Heisenberg:*

$$[V_i, W_j] = i\hbar\delta_{ij}, \qquad [V_i, V_j] = [W_i, W_j] = 0. \tag{6}$$

Si provi a definire l'operatore di spin come

$$S_i = \varepsilon_{ijk}V_jW_k. \tag{7}$$

(a) *Mostrare che l'operatore definito in Eq.* (7) *soddisfa la relazione di commutazione* (5).

(b) *Verificare che dalle definizioni date* $[S_i, V_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}V_k$.

(c) *Mostrare che non è possibile trovare nessun operatore* V_j *e* W_j *tale che sia possibile definire l'operatore di spin 1/2 come prodotto di due operatori vettoriali. Suggerimento: Usare il fatto che gli operatori sono vettoriali, il risultato del punto (b), la relazione* $[L_i, S_j] = 0$ *e l'identità di Jacobi per dimostrare che* $\vec{V} = 0$.

(d) *Discutere il risultato ottenuto, tenendo a mente che le regole di commutazione di Heisenberg Eq.* (6) *implicano che* $W_i = \frac{\partial}{\partial V_i}$ *e che quindi le equazioni agli autovalori che seguirebbero dalla definizione* $S_i = \varepsilon_{ijk}V_jW_k$ *sarebbero identiche a quelle che definiscono le armoniche sferiche che ammettono solamente valori interi di* ℓ.